Appendice 1 - Richiami matematici

1.1. Sistemi di misura

Chiamiamo *grandezza fisica una qualsiasi caratteristica di un corpo o di un fenomeno che può essere misurata alla quale, cioè, è possibile associare un numero*. Per ogni grandezza fisica è elaborato un determinato procedimento di misura.
Al termine di ogni processo di misura ad una caratteristica di un corpo (grandezza fisica) è associata un numero ben preciso (risultato della misura) che indica quante volte l'unità di misura scelta (cioè una grandezza della stessa natura di quella che si vuole misurare e alla quale è assegnato il valore unitario) è contenuta nella grandezza misurata.
L'insieme delle unità di misura fondamentali, mediante le quali può essere espressa ogni altra grandezza fisica costituisce *un sistema di unità di misura*.
Il sistema di unità di misura adottato dalla comunità scientifica a partire dal 1960 è il *Sistema Internazionale* (S.I.) al quale hanno formalmente aderito 48 nazioni. Alcuni paesi, come l'Inghilterra e gli Stati Uniti, non si sono ancora uniformati totalmente al sistema decimale, e utilizzano unità di misura proprie e non universali (pollice, piede, miglio, libbra, oncia, ecc.). Nel S.I., i suoi campioni sono definiti solo per sette grandezze fondamentali e per due grandezze supplementari. Tutte le altre grandezze fisiche sono derivate, cioè le loro unità di misura si ottengono da quelle delle grandezze fondamentali attraverso le relazioni matematiche che le definiscono. La scelta delle grandezze fondamentali è spesso dettata da motivazioni di carattere tecnico–pratico. Le unità fondamentali del S.I. sono riportate nella tabella 1.1.

Tabella 1.1 – Unità fondamentali del S.I.

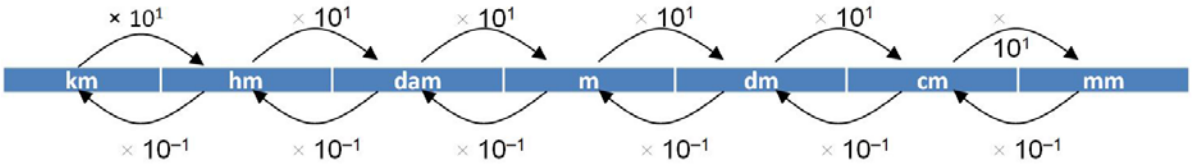
GRANDEZZE E UNITÀ FONDAMENTALI DEL S.I.			
GRANDEZZA	**NOME DELL'UNITÀ DI MISURA**	**SIMBOLO DELL'UNITÀ DI MISURA**	**DEFINIZIONE**
Lunghezza	metro	m	Il metro è lunghezza del tragitto percorso nel vuoto dalla luce in un intervallo di tempo pari alla frazione 1/299.792.458 di un secondo (1983).
Massa	kilogrammo	kg	Il kilogrammo è la massa del prototipo internazionale realizzato in platino iridio nel 1889 e conservato a Sevres dal B.I.P.M. (questa è l'unica unità basata su un campione materiale) (1901).
Tempo	secondo	s	Il secondo è l'intervallo di tempo che contiene 9.192.631.770 oscillazioni della radiazione emessa nella transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133 (1967).
Intensità di corrente elettrica	Ampere	A	L'ampere è l'intensità di corrente elettrica che, mantenuta costante in due conduttori rettilinei, paralleli, di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile e posti alla distanza di un metro l'uno dall'altro, nel vuoto, produce la forza di $2 \cdot 10^{7}$ N su ogni metro di lunghezza di ogni filo (1948).
Temperatura	Kelvin	K	Il kelvin è la frazione 1/273,16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua (1967).
Intensità luminosa	candela	cd	La candela è l'intensità luminosa emessa, in una data direzione, da una sorgente monocromatica di frequenza $540 \cdot 10^{12}$ Hz, e di intensità pari a 1/683 W/sr (1979).
Quantità di sostanza	mole	mol	La mole è la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi contenuti in 0,012 kg di Carbonio 12 (1971). Le entità elementari devono essere specificate e possono essere atomi, ioni, elettroni, ecc., ovvero gruppi specificati di tali particelle.
GRANDEZZE SUPPLEMENTARI DEL S.I.			

Angolo piano	radiante	rad	Il radiante è l'angolo piano al centro che intercetta su una circonferenza un arco lungo quanto il raggio.
Angolo solido	steradiante	sr	Lo steradiante è l'angolo solido al centro che intercetta su una sfera una calotta di superficie uguale a quella del quadrato costruito sul raggio.

Le grandezze solitamente misurate in topografia sono angoli e distanze e la loro misura avviene attraverso il confronto ideale o reale tra due grandezze omogenee e, pertanto, è esprimibile attraverso il prodotto di un numero puro e di un simbolo.

1.1.1. Unità di misura delle lunghezze

Il S.I. adotta come unità di misura per la lunghezza il *metro* quale unità fondamentale. Oltre al metro ci sono poi i suoi multipli e sottomultipli decimali. Nel caso della lunghezza, come è ben noto, per convertire un multiplo (o sottomultiplo) in un altro si procede di 10 in 10 perché ogni multiplo è 10 volte più grande di quello immediatamente più piccolo (tab. 1.2).



Di seguito si riportano i principali prefissi da apporre alle unità di misura per formarne i multipli o sottomultipli:

Tabella 1.2 – Multipli e sottomultipli del metro**MULTIPLI**			**SOTTOMULTIPLI**		
Nome prefisso	**Valore**	**Simbolo**	**Nome prefisso**	**Valore**	**Simbolo**
Deca	10^{1}	da	Deci	10^{-1}	d
Etto	10^{2}	hm	Centi	10^{-2}	c
Kilo	10^{3}	k	Milli	10^{-3}	m
Mega	10^{6}	M	Micro	10^{-6}	µ
Giga	10^{9}	G	Nano	10^{-9}	n
Tera	10^{12}	T	Pico	10^{-12}	p
Peta	10^{15}	P	Femto	10^{-15}	f
Exa	10^{18}	E	Atto	10^{-18}	a
Zeta	10^{21}	Z	Zepto	10^{-21}	z
Yota	10^{24}	Y	Yocto	10^{-24}	y

1.1.2. Misure agrarie

Per la misura della superficie dei terreni si usano normalmente le seguenti unità di misura:

Tabella 1.3 – Misure agrarie

SUPERFICIE			
Nome	**Simbolo**	**Equivalente metrico**	**Valore in m^2**
ettaro	ha	1 hm^2	10000
ara	a	1 dam^2	100
centiara	ca	1 m^2	1

1.1.3. Unità di misura di volume

Per misurare i volumi, l'unità di misura principale è costituita dal volume di un cubo avente ciascuno spigolo della lunghezza di 1 m. I multipli e i sottomultipli dell'unità principale della misura di volume sono equivalenti ai cubi aventi per spigolo i multipli o i sottomultipli del metro.

Tabella 1.4 – Sistema decimale dei volumi

VOLUME			
Nome	**Simbolo**	**Metri**	**Esponenziale**
Chilometro cubo	m^3	1000000000	$10^9 m^3$
ettometro cubo	hm^3	1000000	$10^6 m^3$
decametro cubo	dam^3	1000	$10^3 m^3$
metro cubo	m^3	1	
decimetro cubo	dm^3	0,0001	$10^{-3} m^3$
centimetro cubo	cm^3	0,000001	$10^{-6} m^3$
millimetro cubo	mm^3	0,000000001	$10^{-9} m^3$

1.1.4. Unità di misura degli angoli

Si definisce *angolo* ciascuna delle due parti in cui un piano è diviso da due semirette aventi la stessa origine; l'origine (O), comune alle due semirette, si chiama vertice, mentre le due semirette (r e s) si definiscono lati. Normalmente un angolo è indicato con un arco ed una lettera minuscola dell'alfabeto greco (α, β, γ, ...).

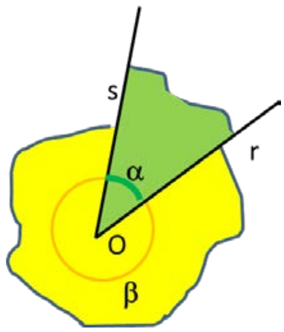


Figura 1.1 – Angoli piani

In topografia, si conviene che la rotazione positiva sia quella in senso orario (o destrorsa) e, quindi, la negativa sarà quella antioraria (o sinistrorsa) e si usano quattro sistemi di misura che esprimono numericamente un angolo.

1.1.5. Sistema analitico

L'intersezione di una circonferenza di raggio r arbitrario e centro nel vertice O dell'angolo e le due rette uscenti da O individua un arco di lunghezza s. Il rapporto s/rs/r è indipendente dal valore del raggio (per la proporzionalità fra gli archi) ed è adimensionale ossia espresso da un numero puro. Per $s = r$ si ha il *radiante* che rappresenta l'unità di misura. L'angolo giro, piatto e retto risultano, rispettivamente, pari a 2π, π, π/2. L'adimensionalità del radiante è utile qualora si debbano combinare lunghezze ed angoli, infatti, in tal caso le dimensioni sono omogenee.

1.1.6. Sistema sessagesimale e sessadecimale

L'unità di misura è il *grado sessagesimale* ottenuto dividendo in 360 parti uguali la circonferenza con centro in un vertice O e raggio r arbitrario. Il grado è divisibile in sessanta parti che definiscono i *primi*, il primo è divisibile in sessanta parti ottenendo i *secondi*; l'ulteriore frazionamento prosegue con la divisione decimale (es. $\alpha = 47°32'13''$).

1.1.7. Sistema centesimale

L'unità di misura è il *grado centesimale* ottenuto dividendo in 400 parti uguali la circonferenza con centro in un vertice O e raggio r arbitrario; l'ulteriore frazionamento prosegue con sottomultipli decimali (es. $\alpha = 47^g 32^c 43{,}13^{cc}$)

1.1.1.1. Formule di trasformazione

Siano a e b i due sistemi di misura e G, P, R rispettivamente l'angolo giro, piatto e retto si ha:

$$\alpha_a = \left(\frac{G_a}{G_b}\right)\alpha_b = \left(\frac{P_a}{P_b}\right)\alpha_b = \left(\frac{R_a}{R_b}\right)\alpha_b \tag{1.1}$$

<u>Conversione dal sistema sessagesimale al sistema analitico e viceversa</u>

$$\frac{\alpha^o}{360} = \frac{\alpha^r}{2\pi} \Rightarrow \alpha^o = \left(\frac{360}{2\pi}\right)\alpha^r \Rightarrow \alpha^r = \left(\frac{2\pi}{360}\right)\alpha^o \tag{1.2}$$

Se nella (1.2) si pone $\alpha^r = 1$, il rapporto $\left(\frac{2\pi}{360}\right)$ rappresenta la misura in radianti dell'angolo di 1° che prende il nome di *arco di un grado* (arc 1°) ed è pari a:

$arc\ 1° = 0{,}174532\ \ldots.$

Analogamente si ottiene:

$$arc1' = \left(\frac{2\pi}{360 \times 60}\right) = 0{,}002908\ \ldots..$$

$$arc1'' = \left(\frac{2\pi}{360 \times 60 \times 60}\right) = 0{,}0000048\ldots \cong 5\ 10^{-6}$$

<u>Conversione dal sistema centesimale al sistema analitico e viceversa</u>

$$\frac{\alpha^g}{400} = \frac{\alpha^r}{2\pi} \Rightarrow \alpha^g = \left(\frac{400}{2\pi}\right)\alpha^r \Rightarrow \alpha^r = \left(\frac{2\pi}{400}\right)\alpha^g \tag{1.3}$$

<u>Conversione dal sistema sessagesimale al sistema centesimale e viceversa</u>

$$\frac{\alpha^o}{360} = \frac{\alpha^g}{400} \Rightarrow \alpha^o = \left(\frac{360}{400}\right)\alpha^g \Rightarrow \alpha^g = \left(\frac{400}{360}\right)\alpha^o \tag{1.4}$$

1.2. Numeri molto grandi e numeri molto piccoli altre unità di misura

Le unità di misura del sistema metrico decimale viste sin qui sono normalmente sufficienti per risolvere i problemi di misurazione della vita quotidiana. Vi sono, tuttavia, altre unità di misura della lunghezza, quali ad esempio: l'*anno-luce* definito come la distanza che la luce (la quale si muove alla velocità di circa 300.000 km/s) percorre in un anno ed equivale a circa 9.463.000.000.000 km (9,463 trilioni di km); il *parsec* equivalente a 3,26 anni-luce, ovvero circa 30.900.000.000.000 km (30,9 trilioni di km); il *micron* è definito come la millesima parte del millimetro (0,000001 m) e altre ancora. Per confrontare tra loro tali misure è opportuno utilizzare la *notazione esponenziale* 10^*; il numero che compare quale fattore della moltiplicazione è chiamato *base*, mentre il numero di volte che è moltiplicato è chiamato *esponente*.

1.2.1. L'ordine di grandezza

Per confrontare misure di grandezze estremamente diverse fra loro si ricorre all'ordine di grandezza, definito come la potenza di 10 più vicina al valore considerato, ad es. 0,4 μ è dell'ordine di grandezza di 10^{-7}m, 6,5 cm è dell'ordine di 10^{-2}.

Tabella 1.5 – Ordini di grandezze

Potenze di dieci	0.001	0.01	0.1	1	10	100	1.000	10.000
Ordine di grandezza	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Gli ordini di grandezza si usano, in generale, per paragonare quantità in maniera molto approssimativa. Se due numeri differiscano per un ordine di grandezza significa che uno è circa dieci volte maggiore dell'altro. L'ordine di grandezza di un numero è, intuitivamente, il *numero di potenze di 10 contenuto nel numero*. Chiameremo *ordine di grandezza di un numero n* la potenza di 10 più vicina a n.

Esempi

- 34.600.000= $3{,}36\text{x}10^7$ poiché la prima cifra decimale è 4<5, si arrotonda 3,46 al numero intero 3 e, inoltre, poiché 3 è minore di 5, l'ordine di grandezza rimane di 10^7;
- 0,00073= $7{,}3\text{x}10^{-4}$ poiché la prima cifra decimale è 3<5, si arrotonda al numero intero 7 che essendo però maggiore di 5, l'ordine di grandezza diventa di 10^{-3};
- 3.570.000=$3{,}57\text{x}10^6$ poiché la prima cifra decimale è 5, si arrotonda al numero intero 4 e visto che è minore di 5, l'ordine di grandezza diventa 10^6.

1.3. Funzioni trigonometriche

In un triangolo rettangolo in cui l'ipotenusa ha lunghezza pari a 1 ed α rappresenta uno dei due angoli acuti si ha che (fig. 1.2):

- $sen\alpha$ è la lunghezza del cateto opposto all'angolo α,
- $cos\alpha$ è la lunghezza del cateto adiacente all'angolo α

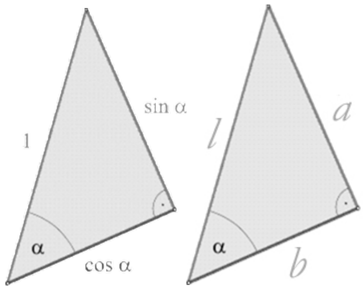


Figura 1.2 – Triangolo rettangolo di ipotenusa 1 a sx e di ipotenusa l a dx

In generale, per ipotenuse di lunghezze variabili *l* è possibile scrivere:

$$sen\alpha = a/l \qquad (1.5)$$

$$cos\alpha = b/l \qquad (1.6)$$

Oltre a seno e coseno si usano altre funzioni da loro derivate denominate *tangente* e *cotangente* interpretate come i rapporti fra i lati del triangolo rettangolo:

$$tg\ \alpha = \frac{a}{b} = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} \qquad (1.7)$$

$$cotg\ \alpha = \frac{b}{a} = \frac{cos\alpha}{sen\alpha} = \frac{1}{tg\ \alpha} \qquad (1.8)$$

Esempi

Consideriamo il problema altimetrico rappresentato in figura 1.3, la distanza inclinata dal punto di osservazione alla sommità della casa è pari a 14,9 m e questa appare sottesa da un angolo di 36,87°. Quanto è alta la casa?

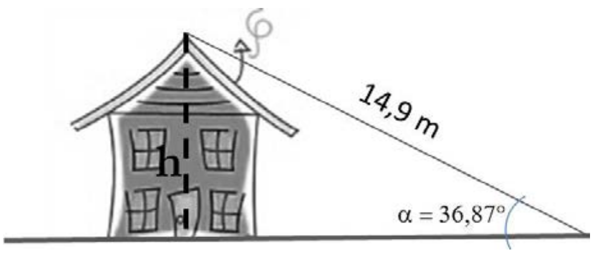


Figura 1.3 – Soluzione altimetrica

Si osserva come lo schema rappresentato nell'immagine corrisponde alla figura di un triangolo rettangolo per cui utilizzando la formula (1.5) si ha:

$$sen(36{,}87°) = \frac{h}{14{,}9}m \quad \Leftrightarrow \quad h = sen(36{,}87°) \times 14{,}9\ m = 8{,}9\ m$$

Inoltre, si ottiene:

$$tg\ (36{,}87°) = \frac{h}{d}m = \frac{8{,}9}{d} \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{8{,}9\ m}{tg(36{,}87°)} = 11{,}9\ m$$

Il coefficiente angolare di una retta è definito mediante il *triangolo di pendenza* ed è dato da $k = \Delta_y/\Delta_x$ ed ha il medesimo valore indipendentemente dalla grandezza dei lati del triangolo. La (1.7) afferma che il coefficiente angolare è uguale alla tangente dell'angolo di pendenza che l'asse delle ascisse forma con la retta stessa:

$$k = tg\alpha \tag{1.9}$$

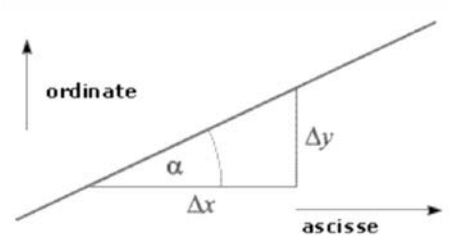


Figura 1.4 – Coefficiente angolare

Se ad esempio l'angolo di pendenza di una strada misura 32°, il coefficiente angolare è tg(32°), che è circa pari a 0,62.

1.3.1. Circonferenza goniometrica

Si consideri un sistema di coordinate cartesiane (X,Y) con origine nel centro di una circonferenza denominata *circonferenza goniometrica* di raggio 1. Si misuri l'angolo α relativamente all'asse delle X (delle ascisse) in senso antiorario.

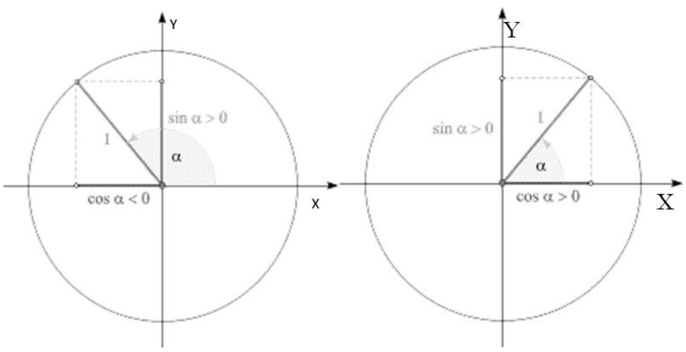


Figura 1.5 – Circonferenza goniometrica per seno e coseno

È possibile aumentare o diminuire l'angolo ruotando il raggio in senso antiorario. In tal caso la posizione del raggio è descritta, come nella figura 1.3 a destra, da un angolo ottuso. È possibile riportare le proiezioni sugli assi cartesiani e definire così il seno e il coseno per ogni angolo. Si osserva che se la proiezione ricade sui valori negativi degli assi cartesiani saranno rispettivamente negativi i valori del seno o coseno. L'angolo rappresentato nella figura 1.3 di destra che ha ad esempio valore pari a 135° avrà il seno pari a 0,7071, mentre il coseno sarà pari a - 0,7071 e, pertanto, negativo. Nella figura 1,3 di destra, ipotizzando un angolo pari a 50°, questo avrà il seno pari a 0,766 ed il coseno pari a 0,6427 e, pertanto, positivo. È possibile continuare a ruotare il raggio rappresentando qualsiasi angolo fra 0° e 360°, e in tutti questi casi il procedimento fornirà un valore univocamente determinato per il seno e per il coseno indicandoci anche il loro segno. Si può, quindi, affermare che il segno di seno e coseno dipende dal quadrante in cui si trova il raggio che rappresenta l'angolo α (i quadranti dividono il piano cartesiano in quattro parti delimitate

dagli assi che vengono numerate in senso antiorario da 1 in alto a destra fino a 4 in basso a destra).
Si può utilizzare la circonferenza goniometrica, per la rappresentazione della tangente corrispondente alla lunghezza del segmento riportato in figura 1.6.

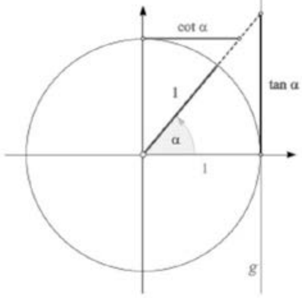
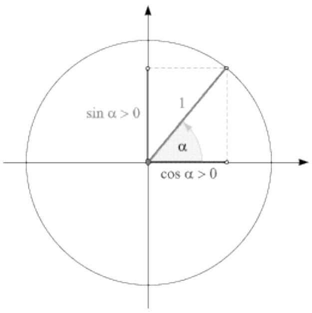
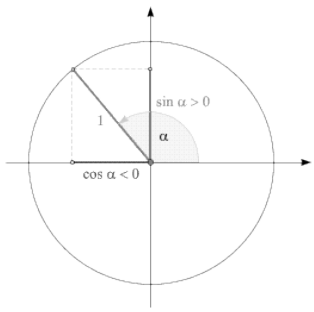


Figura 1.6 – Circonferenza goniometrica per tangente e cotangente

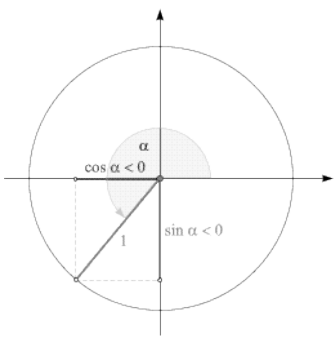
Per la relazione (1.9) essa è pari alla pendenza del raggio, che nella figura (1.6) è ottenuta prolungando con una linea tratteggiata fino a intersecare la retta *g*. Anche per un angolo ottuso oppure negativo è possibile individuare la tangente sulla stessa retta *g*. Con questo metodo possiamo anche determinare facilmente il segno per un tale angolo. La cotangente è determinata invertendo i ruoli degli assi cartesiani.



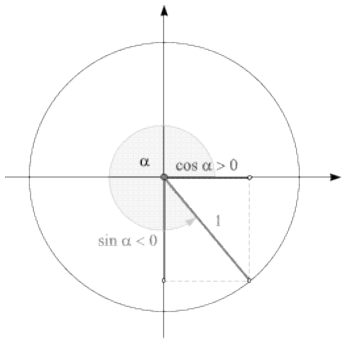
Se α è fra 0° e 90°
(il raggio è nel primo quadrante),
senα e **cosα** sono entrambi **positivi.**



Se α è fra 90° e 180°
(il raggio è nel secondo quadrante),
senα è **positivo** e **cosα** è **negativo**.



Se α è fra 180° e 270°
(il raggio è nel terzo quadrante),
senα e **cosα** sono entrambi **negativi.**



Se α è fra 270° e 360°
(il raggio è nel quarto quadrante),
senα è **negativo** e **cosα** è **positivo**.

Figura 1.7 – Circonferenza goniometrica al variare dell'angolo

Si considerano identici gli angoli che differiscono di 360° (o di un multiplo di 360°).

1.3.2. Proprietà delle funzioni trigonometriche

Una delle proprietà che si ricavano dalla circonferenza goniometrica riguarda il codominio di seno e coseno, infatti, si osserva che i valori di queste funzioni non possono mai essere minori di -1 o maggiori di 1; deducibile dal fatto che le proiezioni del nostro raggio (di lunghezza 1) sugli assi non possono essere più lunghe del raggio stesso. Pertanto, per qualsiasi angolo α si ha:

$-1 \leq sen\alpha \leq 1 \qquad -1 \leq cos\alpha \leq 1$

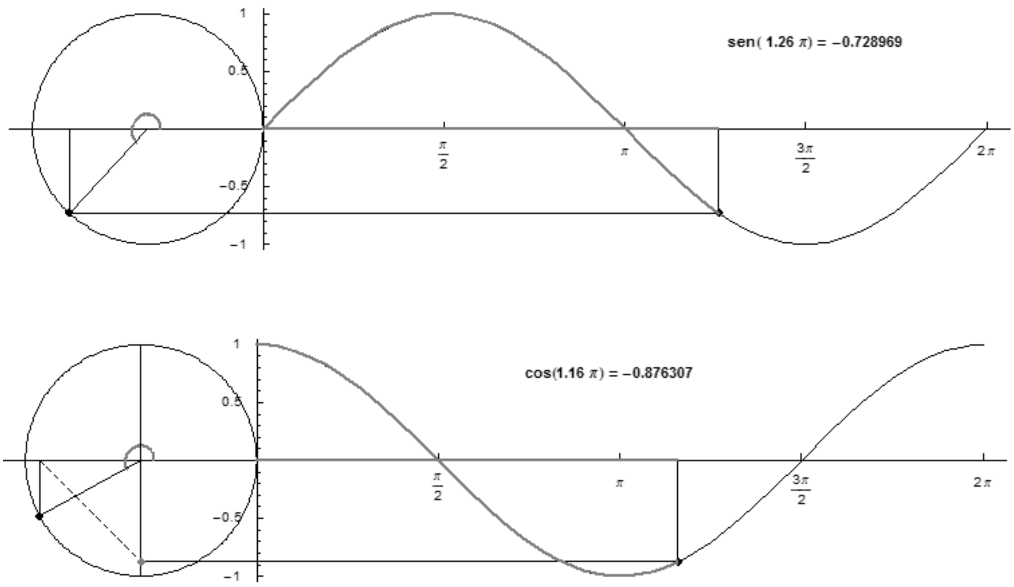


Figura 1.8 – Codominio di seno e coseno

Dalla circonferenza goniometrica è possibile osservare che per valori di α = 90° e α = - 90° il raggio risulta essere è parallelo alla retta *g*, pertanto, la tangente non è definita per questi angoli. Infatti, se α si avvicina a π/2, assumendo valori sempre inferiori di tale valore, la tangente assume valori positivi sempre maggiori; tale andamento si esprime con la scrittura informale:

$$\alpha \to \frac{\pi^-}{2} \quad tg\alpha \to +\infty$$

Allo stesso modo se α si avvicina a - π/2 essendo sempre maggiore di tale valore, la tangente assume valori negativi sempre minori: informalmente esprimiamo ancora ciò con la scrittura:

$$\alpha \to -\frac{\pi^+}{2} \quad tg\alpha \to -\infty$$

In base allo studio del grafico emerge pure che il codominio di tale funzione può assumere qualsiasi valore reale compreso tra $\pm\infty$.

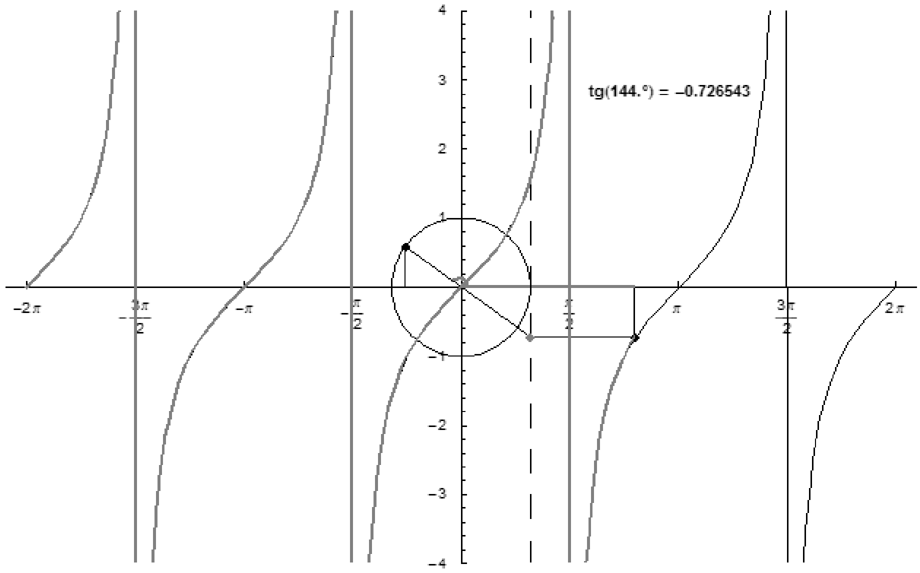
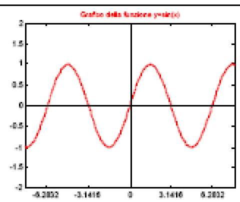
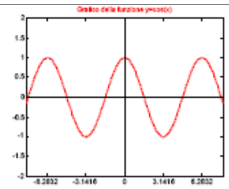
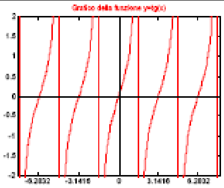


Figura 1.9 – Codominio di tangente

Tabella 1.6 – Funzioni trigonometriche

Funzione	Dominio	Codominio	Periodo	Grafico
$f(x) = senx$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π	
$f(x) = cosx$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π	
$f(x) = tgx$	$\mathbb{R} - \left\{x : x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$[-1, 1]$	2π	

1.3.3. Teorema di Pitagora

Il Teorema di Pitagora afferma che *in un triangolo rettangolo la somma dei quadrati dei due cateti coincide con il quadrato dell'ipotenusa*. Applicandolo al triangolo di figura 1.1 si ottiene per qualsiasi angolo α l'identità:

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

1.3.4. Periodicità e (Anti)simmetria

La circonferenza goniometrica ci mostra che seno e coseno sono funzioni periodiche: quando a un angolo α sommiamo 360°, il raggio ritorna nella stessa posizione di α essendo il loro periodo pari a 360°:

$$sen(\alpha + 360°) = sen\, \alpha$$

$$cos(\alpha + 360°) = cos\, \alpha$$

Mentre la funzione seno è antisimmetrica, la coseno è una funzione simmetrica.

$$sen(-\alpha) = -sen\, \alpha$$

$$cos(-\alpha) = cos\, \alpha$$

1.3.5. Identità con angoli supplementari e complementari

Possiamo anche dedurre identità che riguardano gli angoli la cui somma è pari a 90° (angoli complementari) oppure a 180° (angoli supplementari) e anche gli angoli la cui differenza è pari a 90° oppure 180°:

$$sen(90° - \alpha) = cos\, \alpha$$

$$cos(90° - \alpha) = sen\, \alpha$$

$$sen(\alpha + 90°) = cos\, \alpha$$

$$cos(\alpha + 90°) = -sen\, \alpha$$

$$sen(180° - \alpha) = sen\, \alpha$$

$$cos(180° - \alpha) = -cos\, \alpha$$

$$sen(\alpha + 180°) = -sen\, \alpha$$

$$cos(\alpha + 180°) = -cos\, \alpha.$$

I valori di seno e coseno per angoli arbitrari possono, quindi, essere dedotti dai valori per gli angoli compresi fra 0° e 90°.

1.3.6. Formule di duplicazione

Se conosciamo il valore delle nostre funzioni trigonometriche per un angolo α, possiamo dedurre il valore per l'angolo doppio da:

$$sen(2\alpha) = 2\, sen\, \alpha\, cos\, \alpha$$

$$cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sen^2\alpha$$

Queste formule sono casi particolari di quelle che discutiamo nel prossimo punto.

Tenendo conto della relazione fondamentale tra seno e coseno dalla formula del coseno si ricava:

$cos(2\alpha) = 2\ cos^2\alpha - 1 \Leftrightarrow cos(2\alpha) = 1{-}2\ sen^2\alpha.$

1.3.7. Teoremi di addizione per seno e coseno

Oltre alle relazioni fra seno e coseno discusse sopra, esistono altre identità che riguardano due angoli arbitrari. Sono note come formule per l'addizione o teoremi di addizione che si riportano di seguito senza dimostrazione (la dimostrazione più elegante usa i numeri complessi).
Per due angoli arbitrari α e β si ha sempre:

$$sen(\alpha\ + \beta)\ =\ sen\ \alpha\ cos\ \beta +\ cos\ \alpha\ sen\ \beta$$

$$cos(\alpha\ + \beta) =\ cos\ \alpha\ cos\ \beta - sen\ \alpha\ sen\ \beta$$

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha + \beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$sen\ \alpha\ sen\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$$

$$cos\ \alpha\ sen\beta = \frac{1}{2}\mathrm{sen}(\alpha + \beta) - \frac{1}{2}\mathrm{sen}(\alpha - \beta)$$

$$cos\ \alpha\ cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta)$$

Per certi angoli i valori delle funzioni trigonometriche possono essere espressi con le operazioni di calcolo usuali, in particolare con radici quadrate. Riportiamo nella seguente tabella alcuni di questi angoli con i rispettivi valori:

Tabella 1.6 – Valori delle funzioni per determinati angoli

α	**senα**	**cosα**	**tgα**	**cotgα**
0°	0	1	0	±∞
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
90°	1	0	±∞	0
180°	0	-1	0	±∞
270°	-1	0	±∞	0

1.3.8. Formule di prostaferesi

Detti α e β due angoli si ha:

$$sen\alpha + sen\beta = 2sen\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$sen\alpha - sen\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}sen\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$cos\alpha + cos\beta = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$cos\alpha - cos\beta = -2sen\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

1.3.9. Formule di bisezione

Dato un angolo α si ha:

$$cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+cos\alpha}{2}; cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}};$$

$$sen^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\alpha}{2}; sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}.$$

1.4. Matrici

Si definisce *matrice* un insieme composto da elementi ordinati in *m* righe ed *n* colonne indicato come di seguito:

$$A = A_{m\times n} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Gli elementi a_{ij} posso essere variabili reali, o variabili complesse (in questa appendice consideriamo di solito matrici reali). Per n=1, abbiamo una matrice particolare, detta *vettore colonna* o semplicemente *vettore*.
Si definisce matrice *trasposta* di A la matrice ottenuta scambiando le righe e le colonne:

$$A^T = A^T_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Una matrice si dice *quadrata* se $m = n$ la sua trasposta è anch'essa quadrata.
Una matrice quadrata si dice *diagonale* se $a_{ij} = 0$ per $i \neq j$

$$A = A_{m\times n} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

Una matrice diagonale μ è sempre simmetrica. Una matrice quadrata A si dice *antisimmetrica* se $A=-A^T$.

1.4.1. Operazioni sulle matrici

Le operazioni tra matrici si eseguono mediante l'algebra lineare, detta anche algebra della matrici, in particolare:

- ✓ l'operazione somma, è commutativa ed esiste un elemento neutro rispetto alla somma detto O (elemento nullo relativamente alla somma);
- ✓ per ogni elemento A dello spazio, data una variabile α reale o complessa, esiste l'operazione prodotto per α, dato da$A \cdot \alpha$;
- ✓ date due variabili scalari α e β, valgono le seguenti proprietà:
  - o associativa rispetto al prodotto degli scalari: α(βA) = (αβ)A;
  - o distributiva rispetto alla somma: α(A+B) = αA+αB ;
  - o distributiva rispetto al prodotto per scalare: (α + β)A = αA + βA.

Nel caso particolare delle matrici queste proprietà generali prendono le forme particolari descritte nel seguito.

1.4.1.1. Prodotto per scalare

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.4.1.2. Somma di matrici

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Valgono le seguenti proprietà, che sono state affermate precedentemente:

- ✓ A+O = A
- ✓ A+B = B+A
- ✓ (A+B)+C=A+(B+C)
- ✓ (A+B)T= AT+BT

L'elemento neutro o nullo O prende il nome di *matrice nulla*. L'operazione differenza è definita con l'ausilio dello scalare α = −1:
A−B =A+(−1)B.

1.4.1.3. Prodotto di matrici

Siano A una matrice m × n e B una matrice n×l. Si definisce *matrice prodotto* tra le matrici A e B quella matrice C i cui elementi sono dati da:

$$C_{ij} = C_{m\times l} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad B_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 0 & 23 & 5 \\ 1 & 64 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 2\times 0 + 1\times 1 & 2\times 2 + 1\times 6 & 2\times 3 + 1\times 4 & 2\times 5 + 1\times(-1) \\ 4\times 0 + 3\times 1 & 4\times 2 + 3\times 6 & 4\times 3 + 3\times 4 & 4\times 5 + 3\times(-1) \\ -2\times 0 + (-1)\times 1 & -2\times 2 + (-1)\times 6 & -2\times 3 + (-1)\times 4 & -2\times 5 + (-1)\times(-1) \end{bmatrix}$$

$$C_{3\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 10 & 9 \\ 3 & 24 & 24 & 17 \\ -1 & -10 & -10 & -9 \end{bmatrix}$$

1.5. Sviluppi in serie e calcoli d'approssimazione

Una grandezza *a* si dice *piccola di ordine n* rispetto alla grandezza *b* (assunta come piccola del primo ordine) se $a/b^n \cong 1$.

Nel caso degli sviluppi in serie, il resto *n*-mo della serie è dell'ordine di grandezza del termine *(n+1)*-mo.

La sostituzione di una formula chiusa con il suo sviluppo in serie arrestato al termine *n*-mo è lecita tutte le volte che sia accettabile l'ordine di approssimazione conseguibile.

1.5.1 Sviluppi in serie di Taylor

Sia *f(x)* una funzione definita in un certo intervallo insieme alle sue derivate di qualsiasi ordine ed x_0 un punto interno all'intervallo si ha:

$$f(x) = f(x_0) + h\left(\frac{df}{dx}\right)_0 + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_0 + \cdots + R_n$$

dove $h = x - x_0$ è un incremento nell'intorno del punto x_0 ed è una grandezza piccola del primo ordine. R_n è il resto *n*-mo.

Serie notevoli

- $senx = senx_0 + h\cos x_0 - \frac{h^2}{2} senx_0 - \cdots$
- $\cos x = \cos x_0 - hsenx_0 - \frac{h^2}{2}\cos x_0 + \cdots$
- $tgx = tgx_0 + \frac{h}{\cos^2 x_0} + h^2 \frac{senx_0}{\cos^3 x_0} + \cdots$

1.5.2 Sviluppi in serie di Mac-Laurin

Si ha quando x_0 coincide con l'origine, ossia $x_o = 0 \Rightarrow h = x - x_0 = x$

$$f(x) = f(x_0) + x\left(\frac{df}{dx}\right)_0 + \frac{x^2}{2!}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_0 + \cdots + R_n$$

Serie notevoli

- $senx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$
- $tgx = tgx_0 + \frac{h}{\cos^2 x_0} + h^2 \frac{senx_0}{\cos^3 x_0} + \cdots$

1.5.3 Sviluppi in serie binomiale

$$(1 \pm x)^m = 1 \pm \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 \pm \binom{m}{3} x^3 + \cdots$$

con m qualunque e x in valore assoluto minore dell'unità.

- $m = -1 \Rightarrow \frac{1}{1 \pm x} = (1 \pm x)^{-1} = 1 \mp x + x^2 \mp \cdots$
- $m = -2 \Rightarrow \frac{1}{(1 \pm x)^2} = (1 \pm x)^{-2} = 1 \mp 2x + 3x^2 \mp \cdots$
- $m = ½ \Rightarrow \sqrt{1 \pm x} = (1 \pm x)^{1/2} = 1 \pm \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \pm \cdots$
- $m = -½ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = (1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{x}{2} + 3\frac{x^2}{8} \mp \cdots$

Gli sviluppi in serie saranno usati tutte le volte che si hanno equazioni non lineari di ordine superiore o differenziali. Per ritenere le approssimazioni ammissibili ad un certo ordine sarà opportuno riferirsi alla precisione delle misure.

Esempi

Sia dato un angolo sessagesimale piccolo $\alpha = 1°$ *e lo sviluppo in serie di Mac-Lourin* $sen\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!}$, *si vuole approssimare* $sen\alpha = \alpha$ *effettuando un'approssimazione di* $\Delta\alpha = \frac{\alpha^3}{3!} = \frac{\alpha^3}{6}$

Esprimendo il valore di a in secondi si ottiene:

$$\Delta\alpha \cong \frac{(1\cdot 60\cdot 60)^3}{6\cdot arc1''} \cong \frac{46{,}7\cdot 10^9}{48\cdot 10^{15}} \cong 0{,}98\cdot 10^{-6} \Leftrightarrow \Delta\alpha'' \cong 0{,}98\cdot 10^{-6}\cdot 2\cdot 10^5 \cong 0{,}196''$$

L'approssimazione è valida solo se confrontabile con la precisione ottenibile.

Sia dato un angolo sessagesimale piccolo $\alpha = 1°$ *e lo sviluppo in serie di Mac-Lourin* $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!}$*, si vuole approssimare* $\cos\alpha = 1$ *effettuando un'approssimazione di* $\Delta\alpha = \frac{\alpha^2}{2!} = \frac{\alpha^2}{2}$.

Esprimendo il valore di α *in secondi si ottiene:*

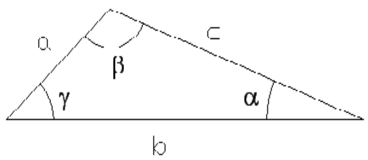
$$\Delta\alpha \cong \frac{(1\cdot 60\cdot 60)^2}{2\cdot arc1''} = \frac{12{,}96\cdot 10^6}{8\cdot 10^{10}} = 1{,}62\cdot 10^{-4} \Leftrightarrow \Delta\alpha'' \cong 1{,}62\cdot 10^{-4}\cdot 2\cdot 10^5 = 32{,}4''$$

Superiore alla precisione che qualunque strumento topografico è in grado di fornire.

1.6. Risoluzione delle figure

Per misurare angoli e distanze è necessario saper risolvere determinate figure geometriche quali:

TRIANGOLO PIANO



Per risolvere un triangolo piano occorre conoscere almeno tre elementi (lati e/o angoli).

Indicato con *s* il semiperimetro del triangolo *(s=1/2(a+b+c))* e con *R* il raggio del cerchio circoscritto è possibile scrivere le seguenti relazioni fondamentali per la risoluzione dei triangoli:

$\alpha + \beta + \gamma = 180° = 200^g = \pi$

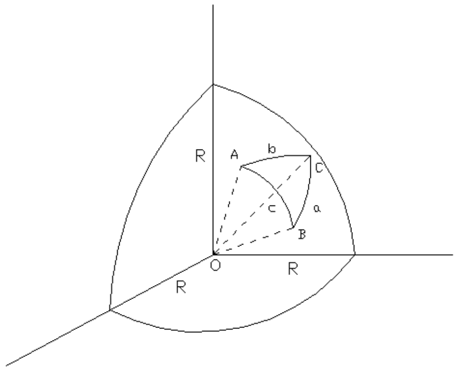
$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma} = 2R$$ *Teorema dei seni*

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta$$ *Teorema delle proiezioni*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$ *Teorema di Carnot*

$$\begin{cases} sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\ cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \end{cases}$$ *Formule di Briggs*

TRIANGOLO SFERICO



Il triangolo sferico *ABC* è quello tracciato sulla sfera di raggio *R* limitato da tre archi *a,b,c*.

La relazione che lega gli angoli ai vertici *A, B, C* e i lati del triangolo sferico *a,b,c* (rappresentati da archi di cerchio) è la seguente *Formula del coseno*:

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + sen\frac{b}{R}\,sen\frac{c}{R}\cos A$$

dove $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$ sono gli angoli al centro *(O)* sottesi e dalla quale sono deducibili tutte le relazioni necessarie alla risoluzione dei triangoli sferici.

$$\frac{sen\frac{a}{R}}{senA} = \frac{sen\frac{b}{R}}{senB} = \frac{sen\frac{c}{R}}{senC}$$ *Teorema dei seni*

$$sen\frac{a}{R}\cos B = \cos\frac{b}{R}\,sen\frac{c}{R} - sen\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R}\cos A$$ *Teorema del coseno*

Nel caso in cui i lati del triangolo siano molto piccoli in rapporto al raggio della sfera è opportuno ricorrere ad una soluzione approssimata del problema attraverso il *Teorema di Legendre*.